Varianta 6

Subiectul I

a) $d(A,B) = 2\sqrt{2}$.

b) $cos^2 101 + sin^2 101 = 1$.

c) $S = 9\sqrt{3}$.

d) $\overline{2+5i} = 2 - 5i$.

e) $a = 1, b = -2$.

f) $BC = 8\sqrt{2}$.

Subiectul II

1.

a) $\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 20 = 0$.

b) $p = \frac{2}{5}$.

c) $x = 1$.

d) $x = 9$.

e) $E = C_7^2 - C_7^5 = 0$.

2.

a) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$.

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\frac{1}{8}$.

c) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2} < 0$, $(\forall) x \in (0, \infty)$, deci f este descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$.

d) $\int_1^2 f'(x)dx = \frac{-3}{28}$.

e) $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 f(n) = 1$.

Subiectul III

a) $x_{1,2} = \frac{-5 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

b) $x^2 + 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, -2)$.

c) $\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=\frac{n+3-n-2}{(n+2)(n+3)}=\frac{1}{g(n)}$.

d) $S \overset{c)}{=} \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+...+\left(\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}\right)=\frac{2006}{6027}$.

e) $f=X^2+2\cdot X\cdot\frac{5}{2}+\frac{25}{4}+\frac{3}{4}=\left(X+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$.

f) Presupunem prin reducere la absurd că există două polinoame $s,t\in \mathbf{R}[X]$, cu $g=s^2+t^2$.

Din $s,t\in \mathbf{R}[X]$ rezultă $g(x)=s^2(x)+t^2(x)\geq 0$, $(\forall)x\in R$, contradicție cu **b)**.

f) Polinoamele $u,v\in \mathbf{C}[X]$, $u=x+\frac{5}{2}, v=\frac{1}{2}i$; verifică $g=u^2+v^2$.

Subiectul IV

a) $f'(x)=e^x$.

b) $f(x)=f'(x)=e^x>0$, $\forall x\in \mathbf{R}$, deoarece funcția exponențială este strict pozitivă.

c) $f'(x)>0$, $\forall x\in \mathbf{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=e^{-\infty}=0\Rightarrow y=0$ este ecuația asimptotei către $+\infty$.

e) $\int_0^1 f(x)dx=e-1$.

f) $f(x)+f(x+1)=1+e \Leftrightarrow e^x+e^{x+1}=1+e \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$.

g) Funcțiile $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ şi $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $g(x)=e^x+x, h(x)=x$ au derivatele $g'(x)=e^x+1>0, h'(x)=1>0$, $\forall x\in \mathbf{R}$, deci sunt strict crescătoare şi $f(x)=g(x)-h(x),\ \forall x\in \mathbf{R}$.